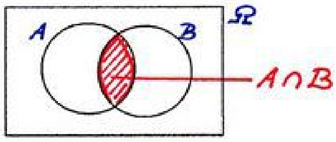
3. Sčítání pravděpodobností

Nechť Ω je množina možných výsledků, jev $A \subset \Omega$, jev $B \subset \Omega$.



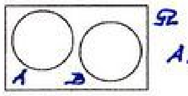
– PRŮNIK JEVŮ A a B … zn. $A \cap B$

– je jev, který nastane ⇔ nastane jev A a současně jev B

(nastanou-li oba jevy současně)

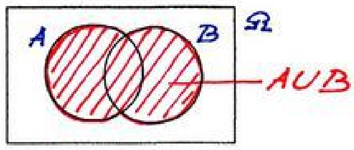
– NAVZÁJEM SE VYLUČUJÍCÍ JEVY … $A \cap B = \emptyset$

(A, B disjunktní množiny)



$A \cap B = \emptyset$ (prázdná mn.)

– SJEDNOCENÍ JEVŮ A a B … zn. $A \cup B$



– je jev, který nastane ⇔ nastane-li alespoň jeden z jevů, tj. nastane-li jev A nebo jev B, tj. nastane buďto jev A, nebo jev B, nebo oba jevy

– pokud se jevy A, B

– NAVZÁJEM VYLUČUJÍ $A \cap B = \emptyset$ $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

– NAVZÁJEM NEVYLUČUJÍ $A \cap B \neq \emptyset$ $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(průnik brán 2x => 1x odečteme)

př. Hod kostkou, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad m(\Omega) = 6$

a) jev A … padnou sudá čísla $\quad A = \{2, 4, 6\} \quad m(A) = 3 \quad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

jev B … padne trojka $\quad B = \{3\} \quad m(B) = 1 \quad P(B) = \frac{1}{6}$

jev $A \cup B$ … ($A \cap B = \emptyset$ VYLUČUJÍCÍ SE JEVY) => $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

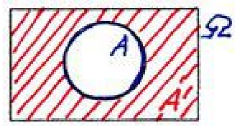
b) jev A … padnou sudá čísla $\quad A = \{2, 4, 6\} \quad m(A) = 3 \quad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

jev B … padnou čísla větší než 2 $\quad B = \{3, 4, 5, 6\} \quad m(B) = 4 \quad P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

jev $A \cup B$ … ($A \cap B = \{4, 6\}$ NEVYLUČUJÍCÍ SE JEVY $\quad P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

– OPAČNÝ (DOPLŇKOVÝ) JEV k jevu A … zn. A'



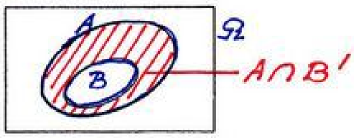
– jev, který nastává ⇔ jev A nenastává $\quad P(A') = 1 - P(A)$

$P(A) = 1 - P(A')$

př. Hod kostkou, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad A = \{3, 4, 5, 6\}$ $\quad P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $\quad$ [$A' = \{1, 2\}$ $\quad P(A') = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ platí]

– jev B je PODJEVEM jevu A … zn. $B \subset A$



platí $\quad P(A \cap B') = P(A) - P(B)$ $\quad [P(B) \leq P(A)]$

TABULKA NEGOVÁNÍ VÝROKŮ

Každý … je …	⇄	Aspoň jeden … není …
Aspoň jeden … je	⇄	Žádný … není …
Aspoň n … je … ($n > 1$)	⇄	Nejvýše ($n - 1$) … je …
Nejvýše n … je … ($n \geq 1$)	⇄	Aspoň ($n + 1$) … je …

Příklady

① Hod kostkou, jev A – padne číslo menší než 4, jev B – padne sudé číslo. Urči P(A ∪ B), P(A' ∪ B').

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ $m(\Omega)=6$

$A = \{1,2,3\}$ $m(A)=3$

$B = \{2,4,6\}$ $m(B)=3$

$A\cap B = \{2\}$ jevy se navz. nevylučují

$\Rightarrow P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$= \frac{3}{6}+\frac{3}{6}-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

DÚ $A' = \{4,5,6\}$ $m(A')=3$

$B' = \{1,3,5\}$ $m(B')=3$

$A'\cap B' = \{5\}$ jevy se nevylučují

$\Rightarrow P(A'\cup B') = P(A')+P(B')-P(A'\cap B')$

$= \frac{3}{6}+\frac{3}{6}-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

② Hod bílou a černou kostkou, b – číslo, které padne na bílé kostce, c – číslo, které padne na černé kostce.

Určete P(A ∪ B), jestliže 2 rozlišitelné kostky $\Rightarrow m(\Omega) = V'(2,6) = 6^2 = 36$

a) jev A … $b + c = 7$ jev B … $b = 4$

vypíšeme si možnosti

	b	č		b	č
A:	1	6	B:	4	1
	2	5		4	2
	3	4		4	3
	4	3		4	4
	5	2		4	5
	6	1		4	6

$A\cap B = \{(4,3)\}$ NEVYLUČ. SE

$m(A)=6$ $m(B)=6$

$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$= \frac{6}{36}+\frac{6}{36}-\frac{1}{36} = \frac{11}{36}$

b) jev A … $b + c = 5$ jev B … $c = 6$

DÚ

A:	1	4	B:	1	6
	2	3		2	6
	3	2		3	6
	4	1		4	6
				5	6
				6	6

$m(A)=4$ $m(B)=6$

$A\cap B = \emptyset$ JEVY NAVZ. SE VYLUČ.

$\Rightarrow P(A\cup B) = P(A)+P(B) = \frac{4}{36}+\frac{6}{36}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

③ Hod bílou a černou kostkou. Urči P(A), P(B), P(A ∩ B), P(A ∪ B), je-li

DÚ jev A … na bílé padne číslo ≥ 3 jev B … na černé kostce padne číslo ≤ 3

	bílá	černá	b	č	b	č	b	č
A:	3	1	4	1	5	1	6	1
	3	2	4	2	5	2	6	2
	3	3	4	3	5	3	6	3
	3	4	4	4	5	4	6	4
	3	5	4	5	5	5	6	5
	3	6	4	6	5	6	6	6

	b	č	b	č	b	č
B:	1	1	1	2	1	3
	2	1	2	2	2	3
	3	1	3	2	3	3
	4	1	4	2	4	3
	5	1	5	2	5	3
	6	1	6	2	6	3

$m(A) = 24$ $m(B) = 18$

– společné $A\cap B = \{(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3),(6,1),(6,2),(6,3)\}$

$m(A\cap B) = 12$ JEVY NAVZ. SE NEVYLUČ.

$P(A) = \frac{24}{36}=\frac{2}{3}$ $P(A\cap B) = \frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

$P(B) = \frac{18}{36}=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = \frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{2+3}{6}=\frac{5}{6}$

④ Hod 4 kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že padnou buďto samá sudá nebo samá čísla větší než 3?

$m = m(\Omega) = V'(4,6) = 6^4$ (čtveřice ze 6 s opak.)

A … na 4 kostkách padnou jen sudá č. (2, 4, 6)

$m(A) = V'(4,3) = 3^4 = 81$

B … na každé ze 4 kostek číslo > 3 (tj. 4, 5, 6)

$m(B) = V'(4,3) = 3^4 = 81$

(2 čísla v A i B) $m(A\cap B) = V'(4,2) = 2^4 = 16$

NAVZ. NEVYLUČ. SE JEVY

$\Rightarrow C = A\cup B$ $P(C) = P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = \frac{3^4}{6^4}+\frac{3^4}{6^4}-\frac{2^4}{6^4} =$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^4-\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{16}+\frac{1}{16}-\frac{1}{81} = \frac{1}{8}-\frac{1}{81} = \frac{81-8}{8\cdot 81} = \frac{73}{648} \doteq 0{,}113$

⑤ 10 studentů, mezi nimi Adam a Břetislav, mají ze svého středu vylosovat tříčlennou komisi. Jaká je pravděpodobnost, že Adam nebo Břetislav budou mezi vylosovanými?

$m = K(3,10) = \binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120$

A… vylosován Adam a 2 jiní z 9 $\quad m(A) = 1\cdot\binom{9}{2} = \frac{9\cdot 8}{2\cdot 1} = 36$

B… vylosován Břetislav a 2 jiní z 9 $\quad m(B) = 1\cdot\binom{9}{2} = 36$

jevy A, B se nevylučují (Břetislav ve 2 z 9, Adam ve 2 z 9) =>

=> $A\cap B$ … (vylosuji Adama a Břetislava) a (1 z 8)

$C = A\cup B$ $\quad m(A\cap B) = 1\cdot\binom{8}{1} = 8$

$P(C) = P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$= \frac{36}{120}+\frac{36}{120}-\frac{8}{120}=\frac{64}{120}=\frac{8}{15}$

⑥ Skupina 10 zájemců o fotbalové utkání (mezi nimi Adam, Břetislav, Cyril a David) obdržela jen 3 vstupenky. Budou o ně losovat. Jaká je pravděpodobnost, že mezi vylosovanými budou

DÚ

a) Adam a Břetislav, nebo Břetislav a Cyril, b) Adam a Břetislav, nebo Cyril a David.

a)

A: (A a B) a (1 z 8) $\quad m(A) = 1\cdot\binom{8}{1} = 8$

B: (B a C) a (1 z 8) $\quad m(B) = 1\cdot\binom{8}{1} = 8$

jevy A, B se nevyluč. (B v A i B)

$A\cap B = \{B\}$ $\quad m(A\cap B) = 1$

=> $P(C) = P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$= \frac{8}{120}+\frac{8}{120}-\frac{1}{120}=\frac{15}{120}=\frac{1}{8}=0{,}125$

$m(\Omega) = K(3,10) = \binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120$

b)

$m(\Omega) = K(3,10) = \binom{10}{3} = 120$

A: A a B a 1 z 8

B: C a D a 1 z 8

} $A\cap B = \emptyset$ NAVZ. SE VYLUČ.

$P(A\cup B) = P(A)+P(B) =$

$= \frac{8}{120}+\frac{8}{120}=\frac{16}{120}=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$

⑦ Jaká je pravděpodobnost jevu A, že při tahu sportky bude taženo alespoň jedno jednociferné číslo?

(losuje se, taženo 6 čísel ze 49)

A… alespoň 1 jednocif. číslo (tj. 1 z 9 jednocif. a k němu 5 dvojcif. ze 40 nebo 2 z 9 jednocif. a k nim 4 dvojcif. ze 40 nebo 3 z 9 a k nim 3 dvojcif. ze 40 nebo … => ZDLOUHAVÉ!

-> lépe využít DOPLŇKOVÝ JEV

A'… žádné jednocifer. č., tj. všechna dvojciferná - tj. taženo 6 ze 40 dvojcifer. $\quad P(A') = \frac{\binom{40}{6}}{\binom{49}{6}}$

[kombinace bez opak. - nezál. na poř.]

$m(A') = K(6,40)$

$m = K(6,49)$

$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{\binom{40}{6}}{\binom{49}{6}} \doteq 0{,}726$

⑧ Házíme dvakrát kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že aspoň jednou padne šestka?

DÚ $\quad m = V'(2,6) = 6^2 = 36$

1. zp. A… aspoň 1krát 6

6 1	1 6
6 2	2 6
6 3	3 6
6 4	4 6
6 5	5 6
6 6	

$m(A) = 11$

$P(A) = \frac{11}{36}$

2. zp. využ. doplňkový jev

A… aspoň 1× 6

A'… nikdy 6, tj. na kostkách padnou čísla 1, 2, 3, 4, 5

$m(A') = V'(2,5) = 5^2 = 25$

$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$

⑨ Házíme 3 různými kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že součet ok je větší než 5?

3 různé kostky => počet možných výsledků $m = V'(3,6) = 6^3 = 216$

jev A ... součet ok > 5 (tj: 6, 7, ..., 18) => ZDLOUHAVÉ => využ. DOPLŇKOVÝ JEV

jev A' ... součet ok $\leqq 5$, ALE máme 3 kostky => $3 \leqq s \leqq 5$

součet 3:	1	1	1	součet 5:	1	2	2
4:	2	1	1		2	1	2
	1	2	1		2	2	1
	1	1	2		1	1	3
					1	3	1
					3	1	1

$m(A') = 10$

$P(A) = 1 - P(A')$

$P(A) = 1 - \frac{10}{216}$

$P(A) \doteq \underline{0{,}9537}$

⑩ Z úplné hry 32 tzv. mariášových karet vytáhneme náhodně 3 karty. Jaká je pravděpodobnost, že mezi
DÚ nimi bude eso?

$m = m(\Omega) = K(3,32) = \binom{32}{3}$

[A ... táhneme eso (1 E z 4 a 2 K z 28 nebo 2 E z 4 a 1 K z 28 nebo 3 E a 0 K z 28) => ZDLOUHAVÉ => využijeme DOPLŇKOVÝ JEV]

A' ... netáhneme eso, tj. táhneme 3 karty z 28 (32 − 4 esa)

$m(A') = K(3,28) = \binom{28}{3}$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{m(A')}{m} = 1 - \frac{\binom{28}{3}}{\binom{32}{3}} = 1 - \frac{\frac{28 \cdot 27 \cdot 26}{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{32 \cdot 31 \cdot 30}{3 \cdot 2 \cdot 1}} =$$

$$= 1 - \frac{\overset{7}{\cancel{28}} \cdot \overset{9}{\cancel{27}} \cdot \overset{13}{\cancel{26}}}{\underset{8\ 4}{\cancel{32}} \cdot 31 \cdot \underset{10}{\cancel{30}}} = 1 - \frac{7 \cdot 9 \cdot 13}{4 \cdot 31 \cdot 10} = 1 - \frac{819}{1240} \doteq 0{,}3395 \doteq \underline{0{,}34}$$

⑪ Ve třídě je 30 žáků, z nichž 5 nemá domácí úkol. V hodině budou vyvolaní 4 žáci. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi bude alespoň jeden žák bez domácího úkolu?

$m = K(4,10) = \binom{30}{4}$

A ... aspoň 1 žák bez DÚ (tj: 1 nebo 2 nebo 3 nebo 4) => ZDLOUHAVÉ

=> A' ... žádný žák bez DÚ, tj. všichni vyvolaní 4 žáci mají DÚ

$m(A') = K(4,25) = \binom{25}{4}$

(čtveřice z 30 − 5 = 25 s DÚ)

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{\binom{25}{4}}{\binom{30}{4}} \doteq \underline{0{,}538}$$

⑫ V zásilce je 100 párů bot, z nichž je 5 párů vadných. Kontrolou náhodně vybereme 5 párů bot. Jaká je
DÚ pravděpodobnost, že aspoň 2 páry budou vadné?

100 párů bot, 5 párů vadných, vyb. 5 párů $m = K(5,100) = \binom{100}{5}$

[A ... aspoň 2 páry vadné (tj. 2 nebo 3 nebo 4 nebo 5) => ZDLOUHAVÉ]

=> A' ... nejvýše 1 pár vadný (tj: žádný nebo 1 pár vadný)

vyb. 1 z 5V a 4 z 95D nebo vyb. 0 z 5V a 5 z 95D

$m(A') = K(\underbrace{1,5}_{5}) \cdot K(4,95) + K(\underbrace{0,5}_{1}) \cdot K(5,95)$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{K(1,5) \cdot K(4,95) + K(0,5) \cdot K(5,95)}{K(5,100)} = 1 - \frac{5 \cdot \binom{95}{4} + 1\binom{95}{5}}{\binom{100}{5}}$$